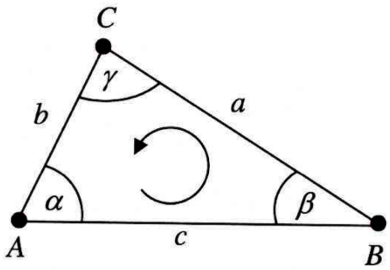
Jochen Weber

Dreieckslehre

1. Winkel beim Dreieck

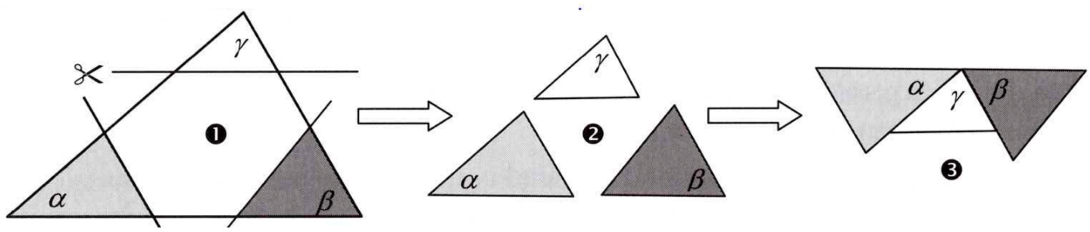
Bezeichnungen am Dreieck:

Verbindet man drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, so erhält man ein Dreieck.



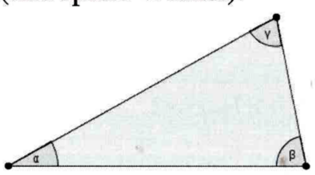
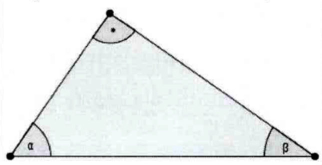
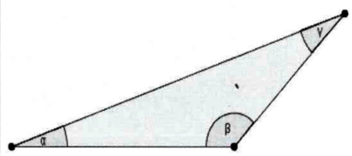
Die Eckpunkte des Dreiecks werden mit den Punkten A, B und C bezeichnet, die Seiten des Dreiecks sind a, b und c, wobei die Seite a dem Punkt A, die Seite b dem Punkt B und die Seite c dem Punkt C gegenüberliegt.
Der Winkel beim Punkt A wird mit α, beim Punkt B mit β und beim Punkt C mit γ bezeichnet.

Innenwinkelsumme:



Die Innenwinkelsumme beträgt in jedem Dreieck 180 °.

Dreiecksarten:

spitzwinkliges Dreieck	*rechtwinkliges Dreieck*	*stumpfwinkliges Dreieck*
Alle drei Winkel sind kleiner als 90° (alle spitze Winkel).	Es gibt einen Winkel mit dem Maß 90° (γ = rechter Winkel).	Einer der drei Winkel hat ein Maß größer als 90° (β = stumpfer Winkel).
		

Jochen Weber

<u>Aufgaben:</u>

1.0 Berechnen Sie den fehlenden Winkel des jeweiligen Dreiecks.

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
α	70°	90°		103°		85°
β	40°		45°	27°	38°	60°
γ		30°	60°		77°	

2.0 Nehmen Sie zu den folgenden Aussagen Stellung.

2.1 Der größte Winkel eines Dreiecks muss mindestens 30° groß sein.

2.2 Es gibt Dreiecke mit zwei Stumpfen Winkeln.

2.3 Ermitteln Sie, wie groß der kleinste Winkel in einem Dreieck höchstens ist.

Lösungen zu den Aufgaben:

1

	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6
α	70°	90°	90°	103°	65°	85°
β	40°	60°	45°	27°	38°	60°
γ	70°	30°	60°	50°	77°	35°

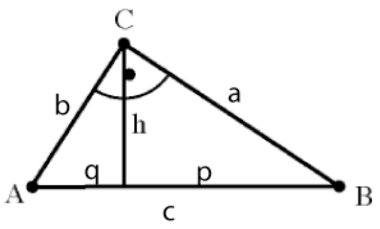
2.1 Falsch. Der größte Winkel muss mindestens ein Maß von 60 ° haben.

2.2 Falsch. Zwei stumpfe Winkel haben zusammen schon ein Winkelmaß größer als 180°.

2.3 Der kleinste Winkel kann höchstens das Maß 60° haben.

2. Besondere Dreiecke

Das rechtwinklige Dreieck:



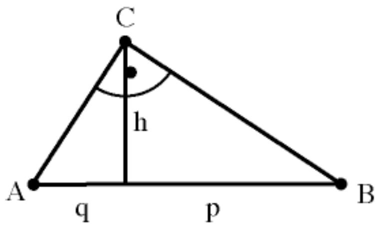
c Hypotenuse
a, b Katheten
p, q Hypotenusenabschnitte

In einem rechtwinkligen Dreieck heißt die Seite, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, Hypotenuse. Die anderen Seiten heißen Katheten.

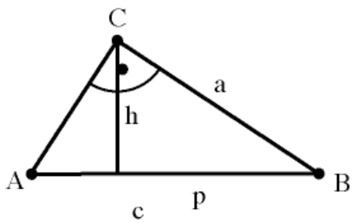
Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck:

a) $a^2 + b^2 = c^2$ (Satz des Pythagoras)

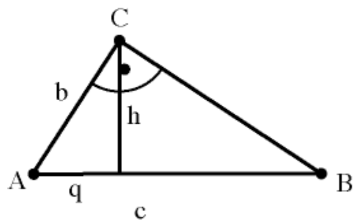
b) $h^2 = p \cdot q$ (Höhensatz)



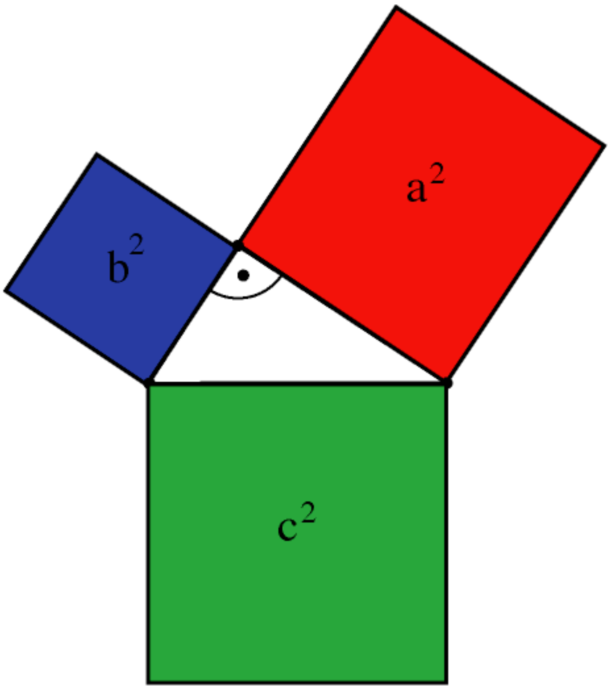
c) $a^2 = c \cdot p$

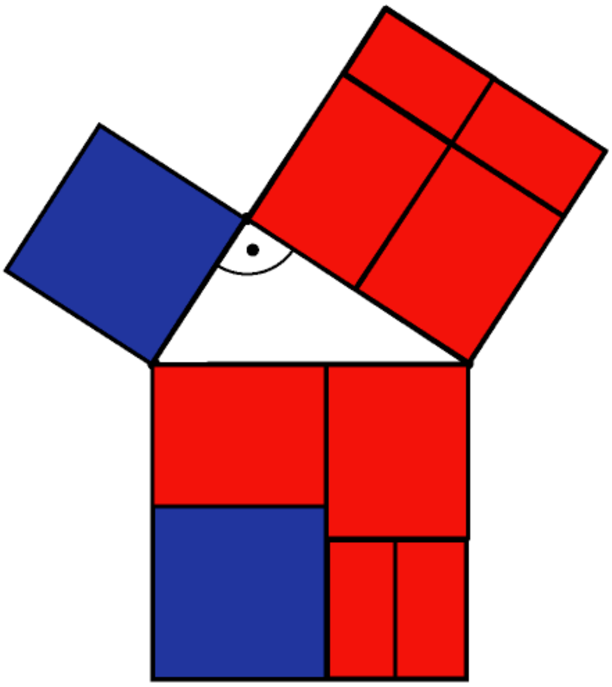


$b^2 = c \cdot q$



Beweis des Satzes von Pythagoras:



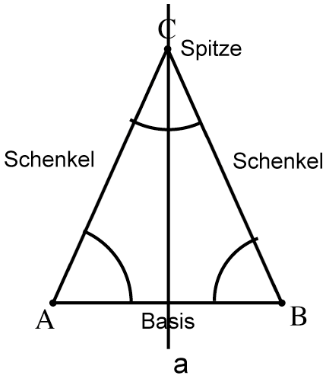


Ein Dreieck, in dem das Quadrat einer Seitenlänge gleich der Summe der Quadrate der beiden anderen Seitenlängen ist, ist rechtwinklig.

Das gleichschenklige Dreieck:

Beispiel:

Bezeichnungen am gleichschenkligen Dreieck:



α, β heißen Basiswinkel

Eigenschaften eines gleichschenkligen Dreiecks:

1. Die Schenkel sind gleich lang: $\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right|$.

2. Das Dreieck ist achsensymmetrisch.

3. Die Basiswinkel sind gleich groß: $\alpha = \beta$.

4. Die Symmetrieachse a halbiert die Basis $\overline{AB}$ senkrecht.

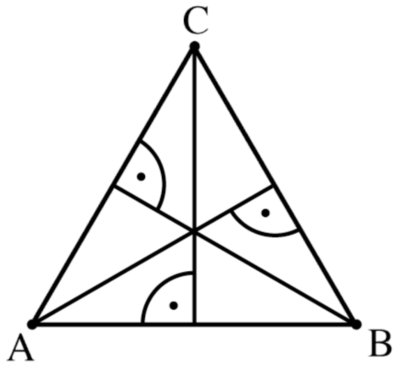
5. Die Symmetrieachse a halbiert den Winkel γ an der Spitze.

Sonderfall:

Wenn der Winkel an der Spitze ein rechter Winkel ist, dann nennt man das Dreieck ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck, bei dem dann die Basiswinkel das Maß 45° haben.

Das gleichseitige Dreieck:

Ein Dreieck, bei dem alle Seiten gleich lang sind, nennt man ein gleichseitiges Dreieck.



Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks:

1. Alle Winkel sind gleich groß $(\alpha = \beta = \gamma = 60°)$.

2. Ein gleichseitiges Dreieck ist bezüglich der Mittelsenkrechten jeder Seite achsensymmetrisch.

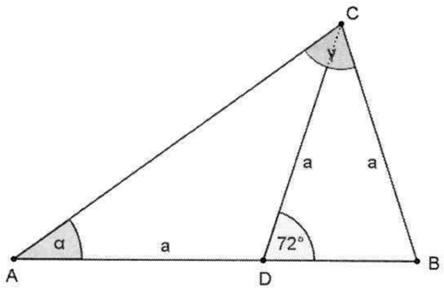
 Jochen Weber

Aufgaben:

1.0 In einem gleichschenkligen Dreieck mit den Basiswinkeln α und β ist das Maß eines Innenwinkels gegeben.
Bestimmen Sie die Maße der beiden anderen Innenwinkel.

	1.1	1.2	1.3
α	57°		
β		27°	
γ			96°

2 Bestimmen Sie in folgender Figur die Maße der Winkel α und γ.



3.0 Beurteilen Sie, ob es Dreiecke mit den angegebenen Winkeln gibt.

3.1 Alle Winkel sind kleiner als 60°.

3.2 Alle Winkel sind größer als 60°.

3.3 Alle Winkel sind gleich 60°.

4.0 Geben Sie an, um welches besondere Dreieck es sich jeweils handelt.

4.1 $\beta = \gamma = 50°$

4.2 $\alpha = \gamma = 60°$

4.3 $\alpha + \beta = 90°$

4.4 $\beta = \gamma = 45°$

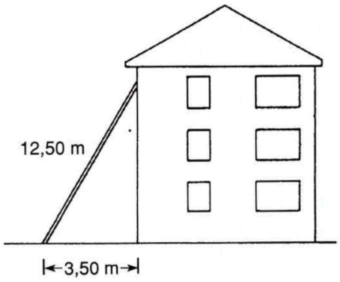
4.5 $\alpha = 57°$ und $\beta = 66°$

4.6 $a = c$ und $\beta = 60°$

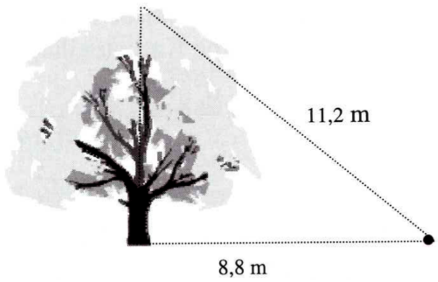
5.0 Berechnen Sie die fehlende Seitenlänge des rechtwinkligen Dreiecks ABC, wenn der rechte Winkel bei C liegt.

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
a	4 cm	5 m		4 dm		
b	3 cm		7 cm	5 dm	6 cm	10 m
c		13 m	25 cm		10 cm	20 m

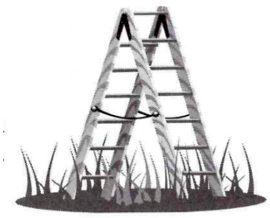
6 Eine 12,50 m lange Aluleiter steht vor einer Hauswand am Boden 3,50 m entfernt.
Bestimmen Sie, wie hoch die Leiter hinauf reicht.



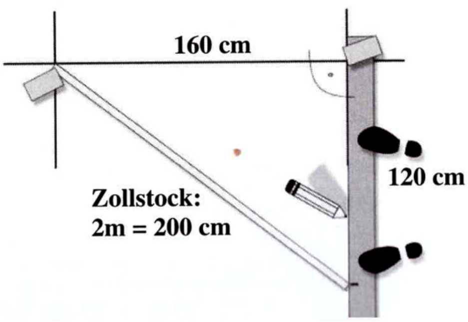
7 Bestimmen Sie mithilfe folgender Abbildung, wie hoch der Baum ist.



8 Die Füße einer Stehleiter stehen 2,20 m auseinander.
Bestimmen Sie, wie lang die Kanten sein müssen, wenn die Spitze der Leiter 2,60 m über dem Erdboden liegen soll.



9 Um einen rechten Winkel auf der Baustelle herzustellen, sind Geodreiecke, wie sie Schüler benutzen, ungeeignet.
Um eine rechtwinklige Ecke zu mauern, nutzt der Handwerker einen Zollstock und eine Richtlatte aus Aluminium.
Erläutern Sie die Vorgehensweise und erklären Sie, warum diese Methode auch als 3:4:5 Teile-Methode bezeichnet wird.

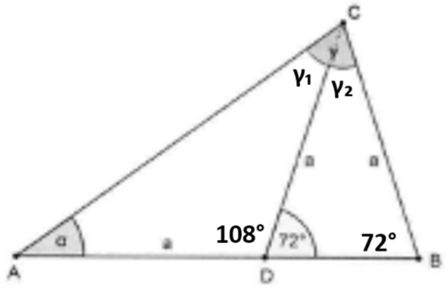


Lösungen zu den Aufgaben:

1.0

	1.1	1.2	1.3
α	57°	27°	42°
β	57°	27°	42°
γ	66°	126°	96°

2



$$180° - 108° = 72° \quad \Rightarrow \alpha = 36° = \gamma_1$$
$$\gamma_2 = 180° - 72° - 72° = 36°$$
$$\Rightarrow \gamma = 36° + 36° = 72°$$

3.1 Es gibt kein solches Dreieck, weil dann die Innenwinkelsumme kleiner als 180° wäre.

3.2 Es gibt kein solches Dreieck, weil dann die Innenwinkelsumme größer als 180° wäre.

3.3 Es gibt ein solches Dreieck, es wäre ein gleichseitiges Dreieck.

4.1 Gleichschenkliges Dreieck mit der Basis a.

4.2 Gleichseitiges Dreieck.

4.3 Rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse c.

4.4 Gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck mit der Hypothenuse a.

4.5 Gleichschenkliges Dreieck mit der Basis b.

4.6 Gleichseitiges Dreieck.

5.0

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
a	4 cm	5 m	24 cm	4 dm	8 cm	$\sqrt{300}$ m
b	3 cm	12 m	7 cm	5 dm	6 cm	10 m
c	5 cm	13 m	25 cm	$\sqrt{41}$ dm	10 cm	20 m

6

$$(3{,}50)^2 + x^2 = (12{,}50)^2 \quad \Rightarrow x^2 = (12{,}50)^2 - (3{,}50)^2 = 144 \quad \Rightarrow x = 12$$

Die Leiter reicht 12 m hinauf.

7

$$(8{,}8)^2 + x^2 = (11{,}2)^2 \quad \Rightarrow x^2 = (11{,}2)^2 - (8{,}8)^2 = 48 \quad \Rightarrow x = \sqrt{48}$$

Der Baum ist etwa 6,93 m hoch.

8

$$(2{,}6)^2 + (1{,}1)^2 = x^2 \quad \Rightarrow x^2 = 7{,}97 \quad \Rightarrow x = \sqrt{7{,}97}$$

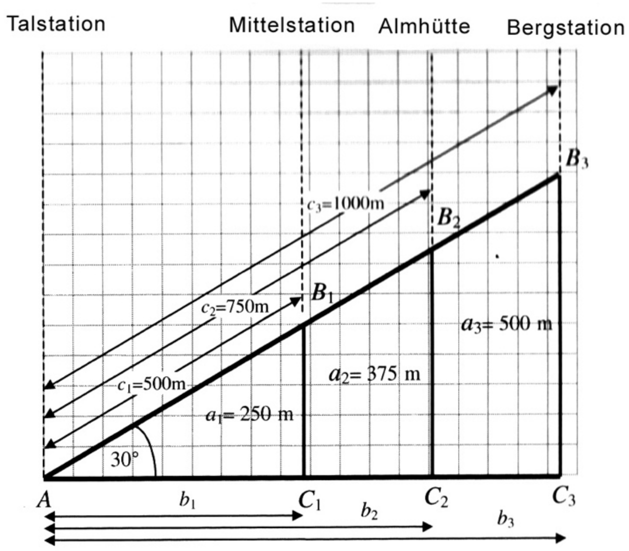
Die Kanten der Leiter sind etwa 2,82 m lang.

9

- Grundlinie legen und vier Teile auftragen ($40\text{ cm} \cdot 4 = 160\text{ cm}$).
- Alulatte an den Eckpunkt legen und Startpunkt markieren.
- Drei Teile ($40\text{ cm} \cdot 3$) vom Startpunkt weg auf der Alulatte markieren.
- Auf dem Zollstock fünf Teile ($40\text{ cm} \cdot 5$) festlegen.
- Zollstock an den Anfang der Grundlinie legen.
- Endpunkt des Zollstocks und die Endmarkierung auf der Alulatte genau zueinander bewegen.
- Mit den Füßen die Alulatte fixieren und Linie ziehen.

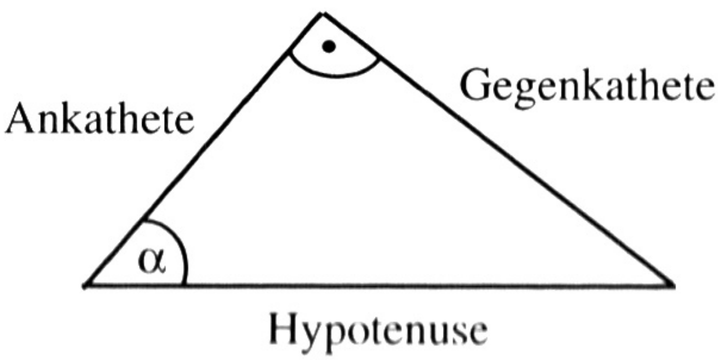
Wegen der Maße 120 : 160 : 200 = 3 : 4 : 5 wird diese Methode auch als 3 : 4 : 5 Teile-Methode bezeichnet.

3. Sinus, Kosinus und Tangens in rechtwinkligen Dreiecken



Es gilt: $\frac{a_1}{c_1} =$ $\qquad \frac{a_2}{c_2} =$ $\qquad \frac{a_3}{c_3} =$

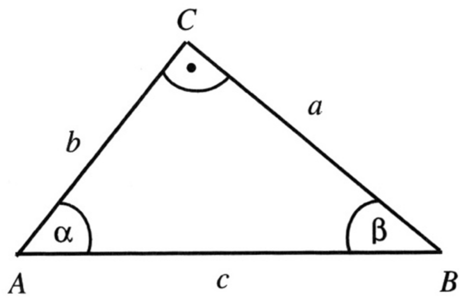
Folgerungen:



Es gilt:

$= \frac{\text{(Länge der) Gegenkathete zu } \alpha}{\text{(Länge der) Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$ $\qquad = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$ $\qquad = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha} = \frac{a}{b}$

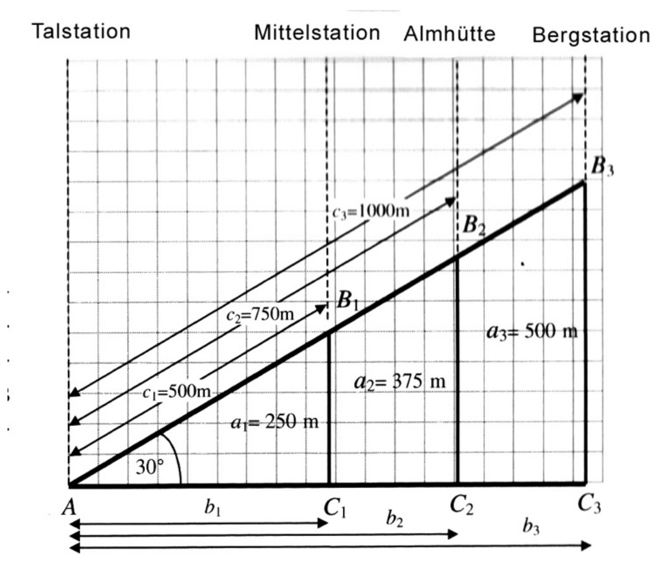
Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen



$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$$

$\sin\beta =$

$\cos\beta =$

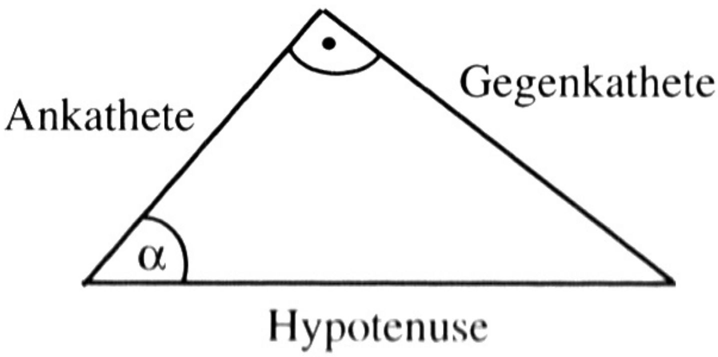


Es gilt: $\frac{a_1}{c_1} = \frac{250}{500} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{a_2}{c_2} = \frac{375}{750} = \frac{1}{2}$ $\quad \frac{a_3}{c_3} = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$

Folgerungen:

1) Die Längenverhältnisse der entsprechenden Seiten in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken sind gleich.
Der Wert des Verhältnisses hängt nur vom gemeinsamen Winkel (hier 30°) ab.

2) Entsprechend stimmen auch die Quotienten $\frac{b_1}{c_1}, \frac{b_2}{c_2}, \frac{b_3}{c_3}$ bzw. $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}$ überein.
Man gibt im rechtwinkligen Dreieck diesen zu einem Winkel gehörenden festen Längenverhältnissen eigene Namen.

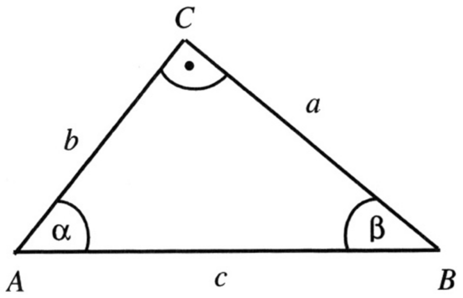


Es gilt:

$$\sin\alpha = \frac{\text{(Länge der) Gegenkathete zu } \alpha}{\text{(Länge der) Hypotenuse}} = \frac{a}{c} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{Ankathete zu } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete zu } \alpha}{\text{Ankathete zu } \alpha} = \frac{a}{b}$$

Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen



$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{a}{c}:\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$$

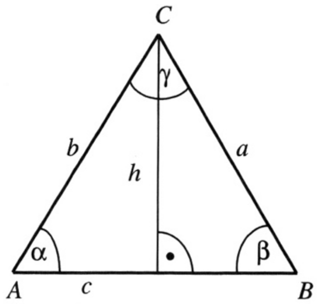
$$\sin\beta=\sin(90^\circ-\alpha)=\frac{b}{c}=\cos\alpha$$

$$\cos\beta=\cos(90^\circ-\alpha)=\frac{a}{c}=\sin\alpha$$

Jochen Weber

Aufgaben:

1 Berechnen Sie die fehlenden Stücke des folgenden Dreiecks (a = b), wenn a = 35m und $\gamma = 50°$.



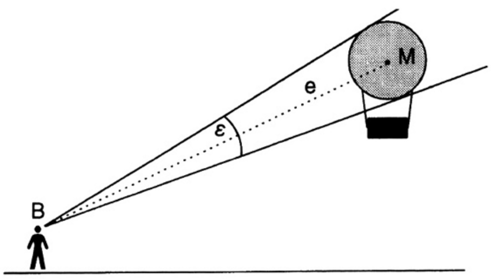
2 In einem bei C rechtwinkligen Dreieck sind $\alpha = 40°$ und $b = 4{,}8\text{ cm}$ gegeben. Berechnen Sie den Winkel β und die Seiten a und c.

3 In einem bei C rechtwinkligen Dreieck sind a = 3,5 cm und b = 4,1 cm gegeben. Berechnen Sie α, β und die Hypotenuse c.

4 In einem bei C rechtwinkligen Dreieck sind $\beta = 50°$ und c = 6 cm gegeben. Berechnen Sie den Winkel α und die Katheten a und b.

5 Bestimmen Sie, wie hoch ein Drachen steht, wenn die gespannte Schnur von 50 m Länge einen Winkel von 52° mit dem Erdboden bildet.

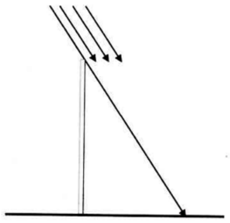
6 Ein Ballon mit dem Durchmesser 20 m wird unter einem Sehwinkel $\varepsilon = 0{,}4°$ beobachtet (siehe untenstehende Skizze).
Berechnen Sie die Entfernung e des Ballons vom Beobachter B.



7 In einem gleichschenkligen Trapez sind die Grundseiten 10 cm und 6 cm lang, die Schenkel 5 cm. Zeichnen Sie das Trapez und berechnen Sie die Maße der Innenwinkel und die Maßzahl des Flächeninhalts.

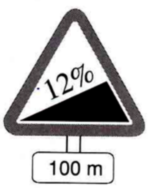
8 Begründen Sie, dass für die Höhe im gleichseitigen Dreieck gilt: $h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$.

9 Eine 3 m hohe Stange wirft auf waagrechtem Erdboden einen Schatten von 2,20 m Länge.
Bestimmen Sie, unter welchem Winkel die Sonnenstrahlen auf den Boden treffen.



10 Die Spitze eines Baumes erscheint aus 25 m Entfernung unter einem Winkel von 42°.
Ermitteln Sie, wie hoch der Baum ist.

11.0 Betrachten Sie das untenstehende Verkehrsschild.



11.1 Erläutern Sie die Angaben auf dem Schild.

11.3 Berechnen Sie den Steigungswinkel.

11.3 Ermitteln Sie, wie viele Meter der Höhenunterschied auf einer Strecke von 800 m beträgt (bei gleichbleibender Steigung).

Lösungen zu den Aufgaben:

1

$$\alpha+\beta+\gamma=180° \Rightarrow 2\alpha=180°-\gamma \Rightarrow \alpha=65°=\beta$$

$$\cos\alpha=\frac{c_1}{b} \Rightarrow c_1=\cos\alpha\cdot b=\cos 65°\cdot 35\approx 14{,}79\text{ cm} \Rightarrow c\approx 29{,}58\text{ cm}$$

$$\sin\alpha=\frac{h}{b} \Rightarrow h=\sin 65°\cdot 35\approx 31{,}72\text{ cm}$$

2

$$\cos\alpha=\frac{b}{c} \quad \Rightarrow c=\frac{b}{\cos\alpha}=\frac{4{,}8}{\cos(40°)}\approx 6{,}27\text{ cm}$$

$$\beta=180°-90°-40°=50°$$

$$a^2+b^2=c^2 \quad \Rightarrow a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{6{,}27^2-4{,}8^2}\approx 4{,}03\text{ cm}$$

3

$$a^2+b^2=c^2 \quad \Rightarrow c=\sqrt{3{,}5^2+4{,}1^2}\approx 5{,}39\text{ cm}$$

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}=\frac{3{,}5}{5{,}39}\approx 0{,}64935 \quad \Rightarrow \alpha\approx 40{,}49°$$

$$\beta=180°-90°-40{,}49°=49{,}51°$$

4

$$\alpha=180°-90°-50°=40°$$

$$\cos\beta=\frac{b}{c} \quad \Rightarrow b=c\cdot\cos\beta=6\cdot\cos\left(50°\right)\approx 3{,}86\text{ cm}$$

$$\sin\beta=\frac{a}{c} \quad \Rightarrow a=c\cdot\sin\beta=6\cdot\sin\left(50°\right)\approx 4{,}60\text{ cm}$$

5 $\sin 52°=\dfrac{h}{50} \Rightarrow h=\sin 52°\cdot 50\approx 39{,}4\text{ m}$

6 $\tan\dfrac{\varepsilon}{2}=\dfrac{10}{e} \Rightarrow e=\dfrac{10}{\tan 0{,}2}\approx 2864{,}78\text{ m}$

7

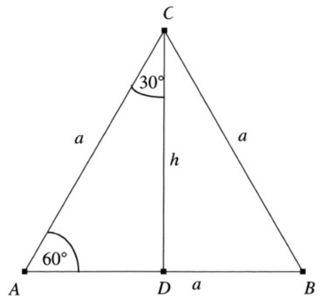
$$\cos\alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha \approx 66{,}42° \Rightarrow \beta \approx 66{,}42°$$

$$\gamma + \delta = 360° - 2 \cdot 66{,}42° = 227{,}16° \Rightarrow \gamma \approx 113{,}58° \Rightarrow \delta \approx 113{,}58°$$

$$\sin 66{,}42° = \frac{h}{5} \Rightarrow h = \sin 66{,}42° \cdot 5 \approx 4{,}58\ \text{cm}$$

Flächeninhalt: $A = 2 \cdot A_{\text{Dreieck}} + A_{\text{Rechteck}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4{,}58 + 6 \cdot 4{,}58 \approx 36{,}64\ \text{cm}^2$

8



$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

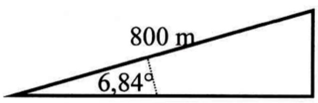
9 $\tan\alpha = \frac{3}{2{,}2} = \frac{15}{11} \quad \Rightarrow \alpha \approx 53{,}75°$

10 $\tan(42°) = \frac{h}{25} \quad \Rightarrow h = 25 \cdot \tan(42°) \approx 22{,}51\ \text{m}$

11.1 Die Angabe bedeutet eine Steigung von 12 %.

11.2 $\tan\alpha = 0{,}12 \quad \Rightarrow \alpha \approx 6{,}84°$

11.3



$$\sin(6{,}84°) = \frac{x}{800} \quad \Rightarrow x = 800 \cdot \sin(6{,}84°) \approx 95{,}28\ \text{m}$$